Traitement des signaux déterministes - Transformée De Fourier - Fonctions

Aubin SIONVILLE

Télécom St Etienne 2023-2024

Transformée de Fourier

Définition

La transformée de Fourier d'une fonction f absolument intégrable est définie par :

$$\boxed{\widehat{f}(u) = F_u^-(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi ut}\mathrm{d}t}$$

C'est cette définition que l'on retiendra.

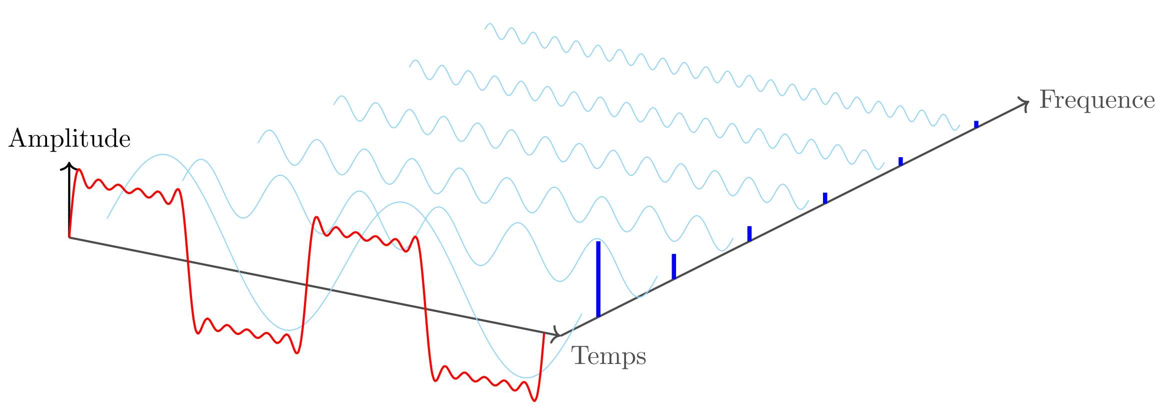
Définition alternative

On peut aussi définir la transformée de Fourier par :

$$\boxed{\widehat{f}(u) = F_u^+(f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{2i\pi ut}\mathrm{d}t}$$

Interprétation

Si f est un signal représenté de manière temporelle, alors $\widehat{f}$ est la représentation fréquentielle de f. Donc $\widehat{f}(u)$ représente l'amplitude de la fréquence u dans le signal f.



Propriétés

Linéarité

$$\boxed{F_u^-(\alpha f + \beta g) = \alpha F_u^-(f) + \beta F_u^-(g)}$$

Modulation

$$\boxed{F_u^-(e^{2i\pi u_0 t} f(t)) = \widehat{f}(u - u_0)}$$

Conjugué complexe

$$\boxed{F_u^-(\overline{f(t)}) = \overline{\widehat{f}(-u)}}$$

Multiplication par x

$$\boxed{F_u^-\big((-2i\pi t)^n f(t)\big) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n}\widehat{f}(u)}$$

Translation

$$\boxed{F_u^-(f(t - t_0)) = e^{2i\pi u t_0} F_u^-(f)}$$

Dilatation

$$\boxed{F_u^-(f(at)) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{u}{a}\right)}$$

Dérivation

$$\boxed{F_u^-(f^{(n)}(t)) = (2i\pi u)^n \widehat{f}(u)}$$

Convolution

$$\boxed{F_u^-(f * g) = \widehat{f}(u)\widehat{g}(u)}$$

Impact sur les équations différentielles

$$\boxed{f'' + f = g \iff [1 - 4\pi^2 u^2]\widehat{f} = \widehat{g}}$$

Transformée de Fourier inverse

Définition

Si $\widehat{f}(u) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi u t}\mathrm{d}t$, alors :

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(u) e^{2i\pi u t}\mathrm{d}u}$$